

Separation af de variable

Skrevet af Jacob Larsen 3.år HTX Slagelse

Udgivet i samarbejde med Martin Gyde Poulsen 3.år HTX Slagelse

Separation af de variable

Dette regnetekniske begreb bruges specielt til løsning af differentialligninger. Og det bruges mest i forbindelse med differentialligninger.

Eks: - de pensumrelevante

$$y' = h(x) \cdot g(y) \quad \text{eller} \quad y' = g(y)$$

Når man bruger separation af de variable er man dog nødt til at bruge følgende notation:

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$$

Ved separation af de variable *'samlers man udtryk som har med x og udtryk som har med y at gøre, på hver deres side af lighedstegnet'*:

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x) \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} \cdot dy = h(x) \cdot dx$$

Nu kan man løse differentialligningen, med den teori som kendes om integration:

$$\int \frac{1}{g(y)} \cdot dy = \int h(x) \cdot dx$$

Når man løser dette udtryk skal man være opmærksom på, at der kun opstår en konstant ved integration af dx .

Af udtrykket som fremkommer af at integrerer dy , skal man efter endt integration isolere y . Således at y kommer til at stå alene på den ene side af lighedstegnet, og et funktionsudtryk af x på den anden.

$$y = f(x)$$

Dette er den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Hvorvidt den partikulære løsning skal findes, er afhængigt af opgavens karakter.

Bevis for at separation er et lovligt indgreb

Dette bevis tager sit udgangspunkt i, at såfremt man kan differentiere det integrerede udtryk og få den oprindelige funktion, så er metoden som man har brugt til at integrere med i orden.

Er løsningen til: $\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$ **virkelig:** $\int \frac{1}{g(y)} \cdot dy = \int h(x) \cdot dx$?

Man antager at $y = f(x)$ og at $dy/dx = f'(x)$. Dette har følgende konsekvenser:

$$f'(x) = h(x) \cdot g(f(x))$$

Ifølge de gældende regler for ligningsløsning, kan man nu gange begge sider med $1/g(f(x))$:

$$\frac{1}{g(f(x))} \cdot f'(x) = h(x)$$

Definitioner:

$$G(f(x)) = \int \frac{1}{g(f(x))} dy \quad \text{og} \quad H(x) = \int h(x) dx$$

$$G'(f(x)) = \frac{1}{g(f(x))} \quad \text{og} \quad H'(x) = h(x)$$

Nu kan man (helt i overensstemmelse med reglerne) omskrive udtrykket fra før til:

$$\begin{aligned} G'(f(x)) \cdot f'(x) &= H'(x) \\ \Leftrightarrow G'(f(x)) \cdot f'(x) - H'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Dette kan omskrives til:

$$(G(f(x)) - H(x))' = 0$$

Da differentialkvotienten er nul, er funktionen konstant. Derfor gælder følgende:

$$\begin{aligned} G(f(x)) - H(x) &= k \\ \Leftrightarrow G(f(x)) &= H(x) + k \end{aligned}$$

Da det vides at $y = f(x)$. Kan man ud fra reglerne om stamfunktioner udlede at der nu gælder:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx$$

Q.E.D

Slut

De naturvidenskabelige

Jacob Larsen og Martin Gyde Poulsen

Evt. fejl og mangler kan sendes til denaturvidenskabelige@nqrd.dk